Uncountable

不可勝數

撰文／黃文璋

再論汽車與山羊問題

應用機率時，必須明察事件彼此之間是否互相獨立，才能做出正確的決定。

著名的「汽車與山羊問題」（car-goat problem）是美國電視節目「來做個交易吧！」的知名遊戲，2008年出品的電影「決勝21點」也曾提及。在一堂數學課裡，老師問學生：

有三扇門，其中一扇門後有汽車，另兩扇門後皆為山羊。當你選定一扇門，主持人打開另兩扇門中的一門，發現門後是山羊，問你要不要更改選擇。更改與否，乃基於得到汽車的機率是否會變大。

大部分學生的想法如下：原先有三扇門，每扇門後有汽車的機率皆為1/3，如今打開的門後無汽車，剩下的兩扇門其後有汽車的機率仍應相同，即皆為1/2，因此不必更改。有一位學生卻獨排眾議，認為該更改，因得到汽車的機率將由1/3增為2/3。老師覺得此生很聰明，對他刮目相看。

機率值會變，是機率的特性。一事件發生的可能性，常隨知道某事件發生（即給新的資訊）而變，這就是所謂條件機率。若不會改變，則新事件與原事件便稱為獨立了。

若不知主持人究竟如何開門，則並無法求出上述那些相關的機率。這個「汽車與山羊問題」不只是一個機智問答的題目。

歷來汽車與山羊問題已有很多人討論，有時還以不同的情境出現，例如選美或釋放囚犯等，但其中仍有一些值得探討之處。為了便於討論，底下的三扇門分別以a、b、c表示，且假設你選a門，而主持人打開b門。電影裡沒講、視之為當然的細節是，主持人事先知道汽車在哪一扇門後，且若b、c兩扇門後有一為汽車，則他必打開有山羊的那扇門；而若b、c兩門後皆為山羊，則他隨機（即各以1/2的機率）打開其中一門。

對那些一直心存疑惑者，有人以如下方式來說明。在主持人開門前，汽車會在b、c兩扇門之一後面的機率為2/3。現既知b門後不是汽車，則c門後便獨自擁有那機率2/3。簡截了當，有人便因此接受了。但有些人追根究柢，當b、c兩門後皆為山羊，而主持人並非依照前述方式各以1/2的機率打開其中一門，那麼更改選擇，得到汽車的機率仍為2/3嗎？如果不是，則c門後獨自擁有機率2/3的解釋，便又難以理解了。

假設當b、c兩門後皆為山羊，主持人以p的機率打開b門，以1-p的機率打開c門，其中p介於0與1間。我們以K表示主持人打開b門之事件，其機率為$P(K)$；以A、B、C表示汽車在a、b、c門後之事件，其機率分別為$P(A)$、$P(B)$、$P(C)$；在給定A、B、C之下K的條件機率為$P(K|A)$，$P(K|B)$、$P(K|C)$。最後，令$P(A|K)$、$P(B|K)$、$P(C|K)$分別表示給定K之下，A、B、C之條件機率，便是我們想求的。由假設$P(A)=P(B)=P(C)=1/3$，且$P(K|A)=p$、$P(K|B)=0$、$P(K|C)=1$。

再利用貝氏定理（Bayes' theorem），便得

$$P(K)=P(K|A)P(A)+P(K|B)P(B)+P(K|C)P(C)$$
$$=(1+p)/3$$

現經由條件機率的定義，則有$P(C\cap K)=P(K|C)P(C)=1/3$，其中$\cap$代表交集。再度利用條件機率，即得

$$P(C|K)=P(C\cap K)/P(K)=1/(1+p)$$

因p介於0與1間，故$P(C|K)$至少是1/2。同理可得$P(A|K)=p/(1+p)$。至於$P(B|K)$當然為0。可看出除非$p=1$，否則$1/(1+p)>p/(1+p)$，因此更改選擇得到汽車的機率較大。附帶一提，在原始的汽車與山羊問題中$p=1/2$，代入$1/(1+p)$中，果然得到$P(C|K)=2/3$。

換個情境，若主持人事先並不知道汽車在哪一扇門後，只是分別以p及1-p的機率打開b及c門，則當打開的是b門、且剛好其後無汽車，此時便不需更改選擇。因更改與否，得到汽車的機率皆為1/2。這部分就留給讀者自行推導。綜上討論，若不知主持人究竟如何開門，則並無法求出上述那些相關的機率。這個「汽車與山羊問題，其實不只是一個機智問答的題目。 SA

黃文璋是高雄大學應用數學系、統計學研究所教授。